# Permutoassociaèdres d'arbres binaires étiquetés

Jean Marcel Pallo (France)

**Résumé.** On généralise aux arbres binaires étiquetés par des entiers relatifs les treillis de rotation des arbres binaires, plus connus sous le nom de treillis de Tamari. L'introduction d'une involution sur ces arbres, i.e. d'une permutation des deux sous-arbres de la racine, permet d'obtenir des diagrammes cohérents.

### 1. Introduction

Les treillis de Tamari ont été intensivement étudié cette dernière décennie (voir de nombreuses références dans [18]). Ils ont été introduit initialement pour caractériser une loi demi-associative sur des mots bien parenthésés [4]. Or ces mots sont en bijection avec les arbres binaires et les triangulations de polygones convexes [5], [21]. La transformation sur les arbres binaires qui correspond à cette loi demi-associative est la rotation [7, p. 461]. Sur les triangulations, c'est l'opération qui consiste à enlever une diagonale et à rajouter la diagonale qui subdivise le quadrilatère obtenu de façon opposée [16], [21]. Les treillis de Tamari des arbres binaires ont été généralisé aux arbres ternaires dans [17]. Les treillis de Tamari des triangulations ont été généralisé dans [3], [19]. On généralise ici les treillis de Tamari des arbres binaires aux arbres binaires étiquetés par des entiers relatifs. On définit sur ces arbres une rotation qui est un cas particulier d'association relativement associative [20]. Puis on introduit une involution qui consiste à permuter les sous-arbres gauche et droit de la racine de ces arbres. On retrouve cette opération en physique théorique sous l'appellation de "twist" [1], [10]. On montre que l'on obtient des diagrammes cohérents au sens de la théorie des catégories, i.e. que ces diagrammes commutent lors des différentes applications de rotation et d'involution [8], [9].

<sup>2000</sup> Mathematics Subject Classification: 05C05, 06B05.

#### 2. Notations et définitions

La classe des arbres binaires ordonnés enracinés  $\mathcal{B}$  est définie récursivement sous forme polonaise par  $\mathcal{B} = \Box + \langle \rangle \mathcal{B} \mathcal{B}$ . Les noeuds internes de arité 2 sont notés  $\langle \rangle$ . Les noeuds externes ou feuilles, de arité 0, sont notées  $\Box$ . On adopte dans toute la suite cette notation polonaise (dite aussi notation linéaire) pour des raisons de concision d'écriture. Donc tout arbre  $T \in \mathcal{B}$  s'écrit de façon unique  $T = \langle \rangle T_G T_D$  où  $T_G$  (resp.  $T_D$ ) est le sousarbre gauche (resp. droit) de sa racine. Le poids |T| d'un arbre  $T \in \mathcal{B}$  est le nombre de ses feuilles. Soit  $\mathcal{B}_n$  l'ensemble des arbres binaires de poids n+1. Les feuilles de  $T \in \mathcal{B}_n$  sont numérotées de gauche à droite de 1 à n+1. On appelle peigne gauche d'ordre n l'arbre de  $\mathcal{B}_n$  dont tous les n noeuds internes ont un sous-arbre droit réduit à une feuille. Etant donné  $T \in \mathcal{B}_n$ , la w-suite de T, notée  $w_T = (w_T(1), w_T(2), \ldots, w_T(n))$ , est la suite d'entiers telle que  $w_T(i)$  est le poids du plus grand sous-arbre de T se terminant en la feuille numéro T0 a toujours T2 et la composition de T3 et en la feuille numéro T4. On a toujours T5 et la composition de T6 et el minimate en la feuille numéro T7 est le poids du plus grand sous-arbre de T8 et erminant en la feuille numéro T8 et la composition de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T8 et erminant en la feuille numéro T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T8 et erminant en la feuille numéro T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand sous-arbre de T9 est le poids du plus grand

La classe des arbres binaires étiquetés  $\mathcal{C}$  est la classe des arbres binaires dont chaque noeud interne est étiqueté par un entier relatif. Si  $T \in \mathcal{C}$ , on peut écrire  $T = \langle p \rangle T_G T_D$  où  $p \in \mathbb{Z}$ . Soit  $\mathcal{C}_n$  la classe des arbres de  $\mathcal{C}$  de poids n+1. Si  $T \in \mathcal{C}_n$ , on note  $sq(T) \in \mathcal{B}_n$  le squelette de T, i.e. l'arbre de  $\mathcal{B}_n$  obtenu en effaçant toutes les étiquettes de T. Voir un exemple sur la figure 1.

La classe des arbres binaires doublement étiquetés  $\mathcal{D}$  est la classe des arbres binaires dont chaque noeud interne est étiqueté par un entier relatif et chaque feuille est étiquetée par une lettre d'un alphabet  $A = \{x, y, z, \ldots\}$ . Soit  $\mathcal{D}_n$  la classe des arbres de  $\mathcal{D}$  de poids n+1. Si  $T \in \mathcal{D}_n$ , on note m(T) le mot associé à T, i.e. le mot formé des lettres de A obtenu en lisant la notation polonaise de T de gauche à droite. Le squelette sq(T) de T se définit comme précédemment.

#### 3. Rotations

**Définition 1.** Etant donnés  $T, T' \in \mathcal{C}_n$ , on dit que T' est obtenu à partir de T par une rotation (et on note  $T \longrightarrow T'$ ) si pour obtenir T' on substitue à un sous-arbre de T de la forme  $\langle p \rangle T_1 \langle q \rangle T_2 T_3$  le sous-arbre  $\langle p + q \rangle \langle p \rangle T_1 T_2 T_3$  où  $p, q \in \mathbb{Z}$ .

La rotation inverse est notée  $\leftarrow$ . Donc  $T \leftarrow T'$  si on substitue au sous-arbre  $\langle r \rangle \langle s \rangle T_1 T_2 T_3$  de T le sous-arbre  $\langle s \rangle T_1 \langle r - s \rangle T_2 T_3$ . On note  $\stackrel{*}{\longrightarrow}$  la fermeture réflexive et transitive de  $\longrightarrow$  et  $\stackrel{*}{\longleftarrow} = \stackrel{*}{\longrightarrow} \cup \stackrel{*}{\longleftarrow}$  sa fermeture symétrique. Voir un exemple sur la figure 1. Lorsque les arbres ne sont pas étiquetés (ou bien lorsque tous les entiers sont pris égaux à 0), on retrouve

la définition classique de la rotation sur  $\mathcal{B}_n$ . Rappelons le résultat suivant [12]:

**Théorème 1.** Si  $T, T' \in \mathcal{B}_n$ , alors  $T \xrightarrow{*} T'$  ssi  $w_T(i) \leq w_{T'}(i)$  pour tout  $i \in [1, n]$ . De plus  $(\mathcal{B}_n, \xrightarrow{*})$  est un treillis et la w-suite de  $T \wedge T'$  se calcule par  $w_{T \wedge T'}(i) = \min(w_T(i), w_{T'}(i))$  pour tout  $i \in [1, n]$ .

Voir [14], [16] pour le calcul de  $T \vee T'$ . On a démontré dans [13] le critère récursif suivant:

**Théorème 2.** Si  $T, T' \in \mathcal{C}_n$ , alors  $T = \langle p \rangle T_G T_D \xrightarrow{*} T' = \langle q \rangle T'_G T'_D$  ssi on a soit:

- (i)  $T_G \xrightarrow{*} T'_G$ ,  $T_D \xrightarrow{*} T'_D$  et p = q soit
- (ii) il existe  $S \in \mathcal{C}$  tel que  $T_D \xrightarrow{*} \langle q p \rangle ST'_D$  et  $\langle p \rangle T_G S \xrightarrow{*} T'_G$ .

Appelons associaèdre  $\mathcal{A}_n(T)$  le diagramme obtenu à partir de  $T \in \mathcal{C}_n$  en effectuant toutes les rotations possibles. Afin d'obtenir une figure concise pour  $\mathcal{A}_4(T)$ , on définit les 14 arbres de  $\mathcal{C}_4$  par:

$$T = \langle p \rangle \square \langle q \rangle \square \langle r \rangle \square \langle s \rangle \square \square$$

$$T_1 = \langle p \rangle \square \langle q + r \rangle \langle q \rangle \square \square \langle s \rangle \square \square$$

$$T_2 = \langle p \rangle \square \langle q \rangle \square \langle r + s \rangle \langle r \rangle \square \square \square$$

$$T_3 = \langle p + q \rangle \langle p \rangle \square \square \langle r \rangle \square \langle s \rangle \square \square$$

$$T_4 = \langle p \rangle \square \langle q + r + s \rangle \langle q \rangle \square \langle r \rangle \square \square \square$$

$$T_5 = \langle p + q \rangle \langle p \rangle \square \square \langle r + s \rangle \langle r \rangle \square \square \square$$

$$T_6 = \langle p \rangle \square \langle q + r + s \rangle \langle q + r \rangle \langle q \rangle \square \square \square$$

$$T_7 = \langle p + q + r \rangle \langle p \rangle \square \langle q \rangle \square \square \langle s \rangle \square \square$$

$$T_8 = \langle p + q + r + s \rangle \langle p \rangle \square \langle q \rangle \square \langle r \rangle \square \square \square$$

$$T_9 = \langle p + q + r + s \rangle \langle p \rangle \square \langle q + r \rangle \langle q \rangle \square \square \square$$

$$T_{10} = \langle p + q + r + s \rangle \langle p + q \rangle \langle p \rangle \square \square \square \langle s \rangle \square \square$$

$$T_{112} = \langle p + q + r + s \rangle \langle p + q + r \rangle \langle p \rangle \square \square \square$$

$$T_{123} = \langle p + q + r + s \rangle \langle p + q + r \rangle \langle p + q \rangle \langle p \rangle \square \square \square$$

Montrons maintenant le résultat de cohérence suivant:

**Théorème 3.** Un arbre  $T \in C_n$  étant donné, l'associaèdre  $A_n(T)$  est cohérent, i.e. il ne peut exister dans  $A_n(T)$  deux arbres T' et T'' (donc  $T \stackrel{*}{\longleftrightarrow} T'' \stackrel{*}{\longleftrightarrow} T''$ ) de squelettes identiques mais avec des étiquettes différentes: sq(T') = sq(T'') et  $T' \neq T''$ .

**Preuve.** Par récurrence sur n. Voir les associaedres de  $A_3(T)$  et  $A_4(T)$ sur les figures 2 et 3. Supposons que pour  $n \geq 5$  on ait  $T = \langle p \rangle T_G T_D \xrightarrow{*} T' =$  $\langle q' \rangle T'_G T'_D$  et  $T = \langle p \rangle T_G T_D \xrightarrow{*} T'' = \langle q'' \rangle T''_G T''_D$  dans  $\mathcal{C}_n$ , avec sq(T') = sq(T'')et  $T' \neq T''$ . On a donc  $sq(T'_G) = sq(T''_G)$  et  $sq(T'_D) = sq(T''_D)$ . Appliquons le Théorème 2. Si  $T_G \xrightarrow{*} T'_G$ ,  $T_D \xrightarrow{*} T'_D$ , p = q' et  $T_G \xrightarrow{*} T''_G$ ,  $T_D \xrightarrow{*} T''_D$ , p = q'' alors de  $sq(T'_G) = sq(T''_G)$  et  $sq(T'_D) = sq(T''_D)$  on déduit par récurrence  $T'_G = T''_G$  et  $T'_D = T''_D$  d'où la contradiction. Si  $T_G \xrightarrow{*} T'_G$ ,  $T_D \stackrel{*}{\longrightarrow} T'_D$ , p = q', il ne peut exister  $S'' \in \mathcal{C}$  tel que  $T_D \stackrel{*}{\longrightarrow} \langle q'' - p \rangle S''T''_D$  et  $\langle p \rangle T_G S'' \xrightarrow{*} T''_G \text{ car } sq(T'_D) = sq(T''_D) \text{ implique ait } |S''| = |T_D| - |T''_D| = 0.$ Supposons maintenant qu'il existe  $S', S'' \in \mathcal{C}$  tels que  $\langle p \rangle T_G S' \xrightarrow{*} T'_G$ ,  $\langle p \rangle T_G S'' \stackrel{*}{\longrightarrow} T''_G, \ T_D \stackrel{*}{\longrightarrow} \langle q' - p \rangle S' T'_D \text{ et } T_D \stackrel{*}{\longrightarrow} \langle q'' - p \rangle S'' T''_D.$  Notons  $pg(T_D') \in \mathcal{C}$  l'arbre tel que  $T_D' \xrightarrow{*} pg(T_D')$  et  $sq(pg(T_D'))$  soit un peigne gauche.  $pg(T'_D)$  est unique car l'hypothèse de récurrence s'applique puisque  $|T_D'| < n$ . Si on avait  $T_D' \neq T_D''$ , on a urait alors dans  $\mathcal{A}(T_D)$  deux arbres  $\langle q' - p \rangle pg(S')pg(T'_D)$  et  $\langle q'' - p \rangle pg(S'')pg(T''_D)$  de squelettes identiques mais différents car  $pg(T'_D) \neq pg(T''_D)$ , ce qui est contraire à l'hypothèse de récurrence. Donc on obtient  $T'_D = T''_D$ . On a alors soit  $q' \neq q''$  soit  $T'_G \neq T''_G$ . Considérons les deux arbres  $\langle q' - p \rangle pg(S')T'_D$  et  $\langle q'' - p \rangle pg(S'')T'_D$ , tous deux dans  $A(T_D)$ . Si  $q' \neq q''$ , ces deux arbres ont même squelette mais sont différents. Si  $T'_G \neq T''_G$ , alors  $S' \neq S''$  puisque  $sq(T'_G) = sq(T''_G)$  et donc  $pg(S') \neq pg(S'')$ . La conclusion est identique et on obtient dans les deux cas une contradiction. 

Corollaire 1. Pout tout  $n, (C_n, \xrightarrow{*})$  est un treillis.

**Preuve.** Résulte de ce que si  $T \in \mathcal{C}_n$ , le squelette de  $\mathcal{A}_n(T)$  est le  $n^{\grave{e}me}$  treillis de Tamari (Théorème 1) et de ce que  $\mathcal{A}_n(T)$  est cohérent (Théorème 3). Pour calculer  $T \wedge T'$  pour  $T, T' \in \mathcal{C}_n$ , on calcule  $w_{sq(T \wedge T')} = \min(w_{sq(T)}, w_{sq(T')})$  puis on calcule les étiquettes de  $T \wedge T'$  par identification. Par exemple, si  $T = \langle p \rangle \Box \langle q \rangle \Box \langle s - q \rangle \langle t - q \rangle \langle r - q \rangle \Box \Box \Box$  et  $T' = \langle p + r \rangle \langle p + q \rangle \langle p \rangle \Box \Box \Box \langle s - r \rangle \langle t - r \rangle \Box \Box \Box$ , alors  $w_T = (1, 1, 1, 2, 3)$ ,  $w_{T'} = (1, 2, 3, 1, 2)$  et donc  $w_{T \wedge T'} = (1, 1, 1, 1, 2)$ . Le calcul des étiquettes donne:  $w_{T \wedge T'} = \langle p \rangle \Box \langle q \rangle \Box \langle r - q \rangle \Box \langle s - r \rangle \langle t - r \rangle \Box \Box \Box$ .

#### 4. Involutions

**Définition 2.** Etant donnés  $T,T' \in \mathcal{D}_n$ , on dit que T' est obtenu à partir de T par une involution si  $T' = \langle -p \rangle T_D T_G$  lorsque  $T = \langle p \rangle T_G T_D$ .

Remarquons que seules les permutations à la racine des sous-arbres gauche et droit sont autorisées. Dans un arbre, on ne peut donc pas permuter les sous-arbres d'un noeud interne qui n'est pas racine de cet arbre. Appelons permutoassociaèdre  $\mathcal{P}_n(T)$  le diagramme obtenu à partir de

 $T \in \mathcal{D}_n$  en effectuant toutes les rotations et involutions possibles (la terminologie est inspirée de [6]). Afin là encore d'obtenir une figure concise pour  $\mathcal{P}_3(T)$ , on définit les 20 arbres de  $\mathcal{D}_3$  par:

$$T = \langle p \rangle x \langle q \rangle y \langle r \rangle zt \qquad \qquad U = \langle q \rangle y \langle r \rangle z \langle -p - q - r \rangle tx$$

$$T_1 = \langle p + q \rangle \langle p \rangle xy \langle r \rangle zt \qquad \qquad U_1 = \langle q + r \rangle \langle q \rangle yz \langle -p - q - r \rangle tx$$

$$T_2 = \langle p \rangle x \langle q + r \rangle \langle q \rangle yzt \qquad \qquad U_2 = \langle q \rangle y \langle -p - q \rangle \langle r \rangle ztx$$

$$T_3 = \langle p + q + r \rangle \langle p \rangle x \langle q \rangle yzt \qquad \qquad U_3 = \langle -p \rangle \langle q \rangle y \langle r \rangle ztx$$

$$T_4 = \langle p + q + r \rangle \langle p + q \rangle \langle p \rangle xyzt \qquad \qquad U_4 = \langle -p \rangle \langle q + r \rangle \langle q \rangle yztx$$

$$V = \langle r \rangle z \langle -p - q - r \rangle t \langle p \rangle xy \qquad \qquad W = \langle -p - q - r \rangle t \langle p \rangle x \langle q \rangle yz$$

$$V_1 = \langle -p - q \rangle \langle r \rangle zt \langle p \rangle xy \qquad \qquad W_1 = \langle -q - r \rangle \langle -p - q - r \rangle tx \langle q \rangle yz$$

$$V_2 = \langle r \rangle z \langle -q - r \rangle \langle -p - q - r \rangle txy \qquad \qquad W_2 = \langle -p - q - r \rangle t \langle p \rangle xyz$$

$$V_3 = \langle -q \rangle \langle r \rangle z \langle -p - q - r \rangle txy \qquad \qquad W_3 = \langle -r \rangle \langle -p - q - r \rangle t\langle p \rangle xyz$$

$$V_4 = \langle -q \rangle \langle -p - q \rangle \langle r \rangle ztxy \qquad \qquad W_4 = \langle -r \rangle \langle -p - q - r \rangle txyz$$

Montrons ci-dessous un autre résultat de cohérence:

**Théorème 4.** Un arbre  $T \in \mathcal{D}_n$  étant donné, le permutoassociaèdre  $\mathcal{P}_n(T)$  est cohérent, i.e. il ne peut exister dans  $\mathcal{P}_n(T)$  deux arbres différents mais avec des squelettes et mots associés identiques.

**Preuve.** Par récurrence sur n. Voir les permutoassociaedres de  $\mathcal{P}_2(T)$ et  $\mathcal{P}_3(T)$  sur les figures 4 et 5. Une rotation est symbolisée par un double trait, une involution par un seul trait. Soit  $T \in \mathcal{D}_n$  avec  $n \geq 4$ . Remarquons tout d'abord que tous les mots associés aux différents arbres de  $\mathcal{P}_n(T)$  se déduisent de m(T) par permutation circulaire. Supposons que dans  $\mathcal{P}_n(T)$  il existe deux arbres T' et T'' tels que  $T' \neq T''$ , sq(T') = sq(T'')et m(T') = m(T''). Soit  $\langle l' \rangle y_k y_{k+1}$  (resp.  $\langle l'' \rangle y_k y_{k+1}$ ) le sous-arbre de poids 2 le plus à droite dans la notation polonaise de T' (resp. T''), avec  $l', l'' \in \mathbb{Z}$ et  $y_k, y_{k+1} \in A$ . On peut toujours à partir de T construire un arbre T dont la notation polonaise contient le sous-arbre  $\langle l \rangle y_k y_{k+1}$ . En effet, si les deux lettres  $y_k$  et  $y_{k+1}$  sont adjacentes dans m(T) et si elles ne sont pas précédées d'un noeud interne, alors on peut toujours en effectuant des rotations construire un arbre  $\hat{T}$  à partir de T dans lequel il y aura le sous-arbre  $\langle l \rangle y_k y_{k+1}$ . Si les deux lettres  $y_k$  et  $y_{k+1}$  ne sont pas adjacentes dans m(T), donc si  $m(T) = y_{k+1} \dots y_k$ , des rotations permettront à partir de T de construire  $T^1 = \langle p^1 \rangle y_{k+1} T_D^1$  avec  $m(T_D^1) = y_{k+2} \dots y_k$ , puis une involution unique nous donnera  $T^2 = \langle -p^1 \rangle T_D^1 y_{k+1}$ , et ensuite d'autres rotations à partir de  $T^2$ nous permettront d'obtenir  $\hat{T}$  dont la notation polonaise se terminera par  $\langle l \rangle y_k y_{k+1}$ . On a nécessairement l = l' = l'' puisque par construction ni les involutions ni les rotations n'affectent l'étiquette du sous-arbre de feuillage  $y_k y_{k+1}$ . Si donc on supprime dans  $\hat{T}, T', T'' \in \mathcal{D}_n$  le sous-arbre commun  $\langle l \rangle y_k y_{k+1}$  pour le remplacer par une nouvelle lettre y, on obtiendra trois arbres de  $\widetilde{T}, \widetilde{T'}, \widetilde{T''} \in \mathcal{D}_{n-1}$  vérifiant  $\widetilde{T'}, \widetilde{T''} \in \mathcal{P}(\widetilde{T}), \widetilde{T'} \neq \widetilde{T''}, sq(\widetilde{T'}) = sq(\widetilde{T''})$  et  $m(\widetilde{T'}) = m(\widetilde{T''})$ . Ceci contredit l'hypothèse de récurrence.

### 5. Conclusion

On a généralisé les treillis de rotation aux arbres binaires étiquetés. En occultant la structure d'ordre obtenue, l'associaèdre correspondant a été utilisé en théorie des langages formels pour définir des langages réguliers lorsque la concaténation n'est pas associative [11]. Si on considère  $T \in \mathcal{C}_n$  avec des étiquettes toutes égales à 1, les étiquettes obtenues dans le peigne gauche pg(T) de T donnent un codage des arbres de  $\mathcal{B}_n$  étudié dans [13]. On peut définir une relation de distributivité sur les arbres binaires étiquetés [2]. Peut-on alors trouver un modèle d'involution qui permettrait d'obtenir des diagrammes cohérents?

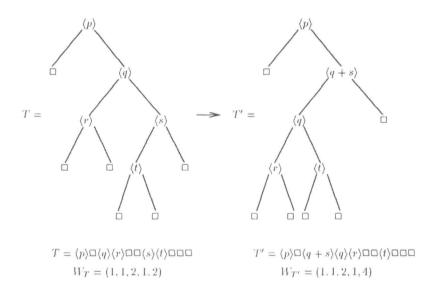


Fig. 1. Une rotation entre deux arbres de  $C_5$  et leur w-suites

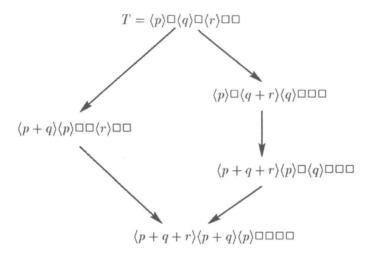


Fig. 2. L'associaè dre  $A_3(T)$ 

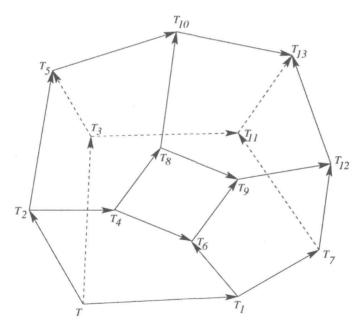


Fig. 3. L'associaè dre  $A_4(T)$ 

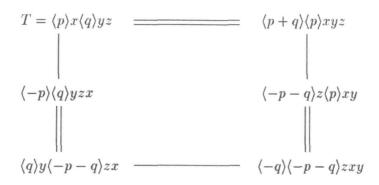


Fig. 4. Le permutoassociaè dre  $\mathcal{P}_2(T)$ 

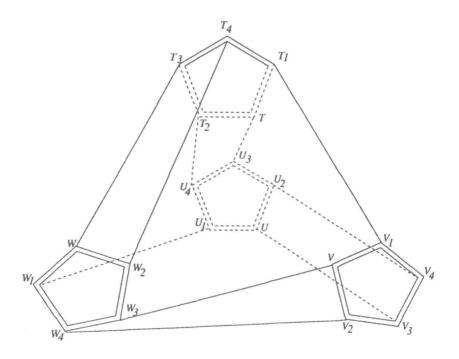


Fig. 5. Le permutoassociaè dre  $\mathcal{P}_3(T)$ 

## RÉFÉRENCES

- [1] V. Aquilanti, C. Coletti, 3nj-symbols and harmonic superposition coefficients: an icosahedral abacus, Chemical Physics Letters, 344 (2001), 601-611.
- [2] A. Bonnin, J.M. Pallo, Cohérence et confluence dans les magmas associatif-relatif et distributif-relatif, 7ème Colloque sur les Arbres en Algèbre et Programmation, Lille (1982), 55-64.
- [3] P.H. Edelman, V. Reiner, The higher Stasheff-Tamari posets, Mathematika, 43 (1996), 127-154.
- [4] H. Friedman, D. Tamari, Problèmes d'associativité: une structure de treillis finis induite par une loi demi-associative, J. Combin. Theory, 2 (1967), 215– 242.
- [5] C. Germain, J.M. Pallo, The number of coverings in four Catalan lattices, Intern. J. Comput. Math., 61 (1996), 19–28.
- [6] M.M. Kapranov, The permutoassociahedron, Mac Lane's coherence theorem and asymptotic zones for the KZ equation, J. Pure Appl. Algebra, 85 (1993), 119-142.
- [7] **D.E. Knuth,** The Art of Computer Programming, vol. 3: Sorting and Searching, Second Edition (Addison-Wesley, 1998).
- [8] S. Mac Lane, Natural associativity and commutativity, Rice University Studies, 49 (1963), 28–46.
- [9] S. Mac Lane, Preface to "Coherence in Categories", Lecture Notes in Math., vol. 281 (Springer-Verlag, 1970).
- [10] A. Marzuoli, M. Rasetti, Spin network quantum simulator, Physics Letters A, 306 (2002), 79-87.
- [11] J.M. Pallo, Modèles associatif-relatif et commutatif cohérents appliqués aux languages réguliers, Calcolo, 19 (1982), 289-300.
- [12] J.M. Pallo, Enumerating, ranking and unranking binary trees, Computer J., 29 (1986), 171–175.
- [13] J. Pallo, Coding binary trees by embedding into the Roubaud's magma, Rad. Mat., 2 (1986), 21-34.
- [14] J.M. Pallo, A distance metric on binary trees using lattice-theoretic measures, Inform. Process. Lett., 34 (1990), 113–116.
- [15] J.M. Pallo, An algorithm to compute the Möbius function of the rotation lattice of binary trees, Informatique Théor. Applic., 27 (1993), 341–348.
- [16] J. Pallo, An efficient upper bound of the rotation distance of binary trees, Inform. Process. Lett., 73 (2000), 87–92.
- [17] J.M. Pallo, The rotation  $\chi$ -lattice of ternary trees, Computing, 66 (2001), 297–308.
- [18] J. Pallo, Generating binary trees by Glivenko classes on Tamari lattices, Inform. Process. Lett., 85 (2003), 235-238.
- [19] V. Reiner, The generalized Baues problem, in "New Perspectives in Geometric Combinatorics", MSRI Publications, vol. 38 (1999), 293-336.
- [20] J. Roubaud, La notion d'associativité relative, Math. Sci. Hum., 34 (1971), 43-59.

[21] D.D. Sleator, R.E. Tarjan, W.R. Thurston, Rotation distance, triangulations and hyperbolic geometry, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), 647–681.

(Received: March 10, 2004) (Revised: September 13, 2004) LE2I UMR 5158 Université de Bourgogne BP 47870 F21078 DIJON-Cedex France E-mail: pallo@u-bourgogne.fr

### Permutoasociedri etiketiranih binarnih stabala

Jean Marcel Pallo

# Sadržaj

Mreže rotacija binarnih stabala, poznatije kao Tamarijeve mreže, se generališu na binarna stabla, etiketirana cijelim relativnim brojevima. Uvodjenje involucije na tim stablima, tj. permutacije dvaju podstabala korijena, omogućava dobijanje koherentnih dijagrama.